

Devoir No 1

Propositions, logique, ensembles, relations et fonctions

Cours : LOG310 – Langages formels et semi-formels
Session : Hiver 2005
Professeur(e) : Sylvie Ratté
Chargé(e) de lab : Michel Halde
Date : 7 janvier, 2005

Date de remise : 12 janvier 2005
Type de remise : Papier
Modalité : Correction en classe
Pondération : 5%

Objectif

Ce petit devoir vous permettra de réviser certains concepts que vous avez appris dans le cours de mathématiques discrètes (MAT210). Ces concepts nous seront nécessaires pendant une bonne partie de la session (et oui! Même dans UML!)

Nous examinerons, d'après les résultats obtenus par l'ensemble du groupe, quelle stratégie il convient d'adopter, en groupe et individuellement parlant, pour vous remettre à jour.

Les concepts abordés dans ce devoir sont simples et couvrent :

- ◆ la logique propositionnelle;
- ◆ la logique du 1^{er} ordre (aussi appelée logique des prédicats);
- ◆ la théorie des ensembles (définition, opérations);
- ◆ les fonctions et les relations.

Nous corrigerons ce devoir en classe. Les copies corrigées me seront ensuite remises afin que je puisse comptabiliser les notes. Nous aborderons ensuite le thème portant sur les langages, les grammaires et les automates, un thème qui ne nécessite pas l'apport immédiat des notions visées par ce devoir. De cette manière, ceux ou celles nécessitant une bonne révision auront le temps de reprendre le train.

Questions

La compagnie pharmaceutique LABLOG comprend 25 laboratoires de recherche dont les accès sont limités à certaines catégories d'employés. Chaque laboratoire est identifié par une lettre entre B et Z. Toutes les entrées dans les laboratoires et dans l'édifice lui-même sont contrôlées par un scanner rétinien. La compagnie engage 350 personnes qui sont identifiées par un numéro unique résultant de l'application d'un algorithme de cryptage sur leur profil rétinien. Le numéro est composé de 4 chiffres. Le chiffre de gauche indique l'étage sur lequel l'employé travaille, les trois autres chiffres correspondent à son profil rétinien. Voici quelques éléments qui nous permettront d'amorcer la formalisation de quelques spécifications.

- « ensEmployés » est un ensemble contenant tous les employés (ensemble contenant donc les numéros de tous les employés);
- « ensLabos » est l'ensemble de tous les laboratoires;
- $\text{Labo}(id\text{Lab})$ est une fonction qui retourne l'ensemble des employés ayant accès au laboratoire fourni en argument. Ainsi, $\text{Labo}(B)$ retourne l'ensemble des employés ayant accès au laboratoire B.
- L'entrée principale est identifié par la lettre A et est considéré comme un laboratoire.
- Le directeur de la compagnie porte le numéro 0000.
- Tout le personnel de la direction possède un numéro inférieur à 0100 et travaille donc au rez-de-chaussée.

Donnez une formulation en logique du 1^{er} ordre des énoncés suivants.

Exemple :

Tous les employés ont accès aux laboratoires H et L.

$\forall x [x \in \text{ensEmployés} \Rightarrow (x \in \text{Labo}(H) \wedge x \in \text{Labo}(L))]$

on peut aussi écrire :

$\forall x \in \text{ensEmployés} [x \in \text{Labo}(H) \wedge x \in \text{Labo}(L)]$

- 1 Tous les employés ont accès à certains laboratoires.
- 2 Certains des laboratoires de la compagnie sont accédés par une seule personne. Cette personne est le directeur.
- 3 Les employés qui ont accès aux laboratoires G et S ne peuvent avoir accès au laboratoire Y.

Donnez la spécification implicite des ensembles décrits par les énoncés suivants.

Exemple :

L'ensemble des employés de la direction sauf le directeur.

$\{x \mid x \in \text{ensEmployés} \wedge x < 100 \wedge x \neq 0\}$

- 4 L'ensemble des laboratoires qui peuvent être accédés par plus de 5 personnes.
(Note : La cardinalité d'un ensemble se note $|ensemble|$.)
- 5 L'ensemble des employés qui ont accès à tous les laboratoires sauf le laboratoire S.
- 6 Décrivez l'ensemble précédent uniquement avec l'aide des opérations ensemblistes
(Note : les opérations ensemblistes sont l'union, l'intersection et la différence).

Quelques questions sur les relations et les fonctions.

- 7 Quel est le domaine et l'image de Labo?
- 8 Considérez la définition suivante de la fonction « Attrib » :
 $\text{Attrib} : \text{ensEmployés} \rightarrow \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 0 \wedge x \leq 6999\}$
a) La fonction « Attrib » est surjective, injective ou bijective? Argumentez.
b) Est-elle partielle ou totale? Argumentez.
- 9 Toute relation peut être définie explicitement comme un ensemble de paires dont le premier terme appartient au domaine de la relation et dont le deuxième terme appartient à l'image. Ainsi, tout produit cartésien fournit rapidement la définition d'une relation. Exemple : $A \times B =_{\text{def}} \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$. Quelle relation est décrite par la définition implicite suivante:
 $\{\langle x, y \rangle \mid y \in \text{ensLabos} \wedge x \in \text{ensEmployés} \wedge x \geq 5000 \wedge x < 6000\}$
Traduisez en français la définition précédente. Évitez les traductions littérales du type « l'ensemble des paires 'x' et 'y' telles que le 'y' appartient à l'ensemble des laboratoires et 'x' appartient à l'ensemble des employés et le numéro d'employés de 'x' se situe entre 5000 (inclusivement) et 6000 (exclusivement) »!

Donnez un équivalent en logique propositionnelle des énoncés suivants.

Exemple :

L'employé 4334 et l'employé 2344 sont dans le laboratoire S mais pas l'employé 1245.
Posons $e4334$ comme étant la proposition : « L'employé 4334 est dans le laboratoire S »
Posons $e2344$ comme étant la proposition : « L'employé 2344 est dans le laboratoire S »
Posons $e1245$ comme étant la proposition : « L'employé 1245 est dans le laboratoire S »
Réponse : $e4334 \wedge e2344 \wedge \neg e1245$.
Utilisez toujours des propositions simples (sans négation ni connecteurs implicites).

- 10 L'employé 1212 n'aime pas travailler dans le laboratoire C ni dans le laboratoire E.
- 11 Si ni l'employé 2334 ni l'employé 4545 travaillent dans le laboratoire F, alors l'employé 5666 n'y travaille pas non plus.
- 12 Si l'employé 6677 n'est pas dans le laboratoire D ou dans le laboratoire G, il est dans le laboratoire R ou dans le laboratoire S.